



15

Стереометрическая задача

15.1

ФИПИ 30ED04

В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT : TD = 2 : 1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- Найдите площадь сечения.

15.2

ФИПИ 149319

В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 5. Боковое ребро пирамиды равно 9. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT : TD = 1 : 2$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- Найдите площадь сечения.

15.3

ФИПИ F7B7A1

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

- Докажите, что $KM \perp AC$.
- Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

15.4

ФИПИ E95564

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 1 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 5$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

15.5

ФИПИ EA6B32

В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 5$ и диагональю $BD = 9$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5.

На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 4$.

- Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
- Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

15.6

ФИПИ 03В44В

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$.

- а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

15.7

ФИПИ 04294С

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC , точка K делит ребро BC в отношении $BK : KC = 3 : 1$, а $AB = 2$ и $SO = \sqrt{14}$.

- а) Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA .
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD .

15.8

ФИПИ С84642

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания.

На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 2\sqrt{6}$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 .

15.9

ФИПИ 6В5С41

Различные точки A , B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S так, что отрезок AB является её диаметром. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60° .

- а) Докажите, что $\cos \angle ASC + \cos \angle BSC = 1,5$.
б) Найдите объём тетраэдра $SABC$, если $SC = 1$, $\cos \angle ASC = \frac{2}{3}$.

15.10

ФИПИ 8ЕЕВ4F

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , равными 8 и 3 соответственно. Точки M и N лежат на рёбрах SD и BC соответственно, причём $SM : MD = 3 : 2$, $BN : NC = 1 : 2$. Плоскость AMN пересекает ребро SC в точке K .

- а) Докажите, что $SK : KC = 6 : 1$.
б) Плоскость AMN делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

15.11

ФИПИ 8А0В46

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.
б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

15.12

ФИПИ 7EE2FA

На рёбрах BC , AB и AD правильного тетраэдра $ABCD$ отмечены точки L , M и N соответственно. Известно, что $BL : LC = AM : MB = AN : ND = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость α , проходящая через точки L , M , N , делит ребро CD в отношении $2 : 1$, считая от вершины C .

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если $AB = 6$.

15.13

ФИПИ 182CF4

В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO .

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α , если $AD = 10$, $BC = 8$, $SO = 8$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD .

15.14

ФИПИ 9A3AF9

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M — середина ребра AB . Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

а) Докажите, что $KM = KD$.

б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

15.15

ФИПИ 6BFFF1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 4. Точка K — середина ребра A_1B_1 .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью AKC является равнобедренной трапецией.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости AKC .

15.16

ФИПИ 416B0F

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания.

На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB = 20$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 21$.

15.17

ФИПИ 065E0A

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 9. Точка M лежит на ребре AB , $AM = 1$, а точка K лежит на ребре SC . Известно, что $MK = KD$.

а) Докажите, что плоскость DKM перпендикулярна плоскости ABC .

б) Найдите площадь треугольника DKM .

15.18

ФИПИ 727800

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AB = 2$. Плоскость α проходит через вершины A_1 и B и середину M ребра CC_1 .

а) Докажите, что сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения плоскостью α равна 6.

15.19

ФИПИ В19404

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точки M и K — середины боковых рёбер SA и SD соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и CK лежат в одной плоскости.

б) Найдите высоту пирамиды, если $AB = 8$, а угол между плоскостью BMC и плоскостью основания пирамиды равен 45° .

15.20

ФИПИ 13D60B

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания.

На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите объём цилиндра, если $AB = 7$, $BB_1 = 24$, $B_1C_1 = 10$.

15.21

ФИПИ ED4407

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A . На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 2.

а) Докажите, что точка M — середина ребра $A_1 B_1$.

б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 5 и известно, что точка K делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $B_1 K : KC_1 = 2 : 3$.

15.22

ФИПИ 3C8708

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K .

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C .

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α .

15.23

ФИПИ D7147A

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания.

На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45° .

б) Найдите объём цилиндра.

15.24

ФИПИ С3497С

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .
- б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

15.25

ФИПИ 4679В2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 4$, $SK : KB = 1 : 3$.

- а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
- б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

15.26

ФИПИ DBF6BE

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точки M и K — середины боковых рёбер SA и SD соответственно.

- а) Докажите, что прямые BC и MK параллельны.
- б) Найдите объём пирамиды $MABF$, если $AB = 12$, а угол между плоскостью BMC и плоскостью основания пирамиды $SABCDEF$ равен 30° .

15.27

ФИПИ 454D16

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ точки M и K — середины боковых рёбер SA и SD соответственно.

- а) Докажите, что прямые BC и MK параллельны.
- б) Найдите объём пирамиды $MABF$, если $AB = 8$, а угол между плоскостью BMC и плоскостью основания пирамиды $SABCDEF$ равен 45° .

15.28

ФИПИ 16С715

Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость α проходит через вершины B_1 и D и пересекает рёбра AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно. Известно, что четырёхугольник MB_1KD — ромб.

- а) Докажите, что точка M — середина ребра AA_1 .
- б) Найдите высоту призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если площадь её основания $ABCD$ равна 3, а площадь ромба MB_1KD равна 6.

15.29

ФИПИ 5F0C14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка M — середина ребра AB . Через точку M проведена плоскость α , параллельная плоскости SBC и пересекающая ребро SD в точке K .

- а) Докажите, что K — середина ребра SD .
- б) Найдите объём пирамиды $SABCD$, если $AB = 24$, а угол между прямой MK и плоскостью основания пирамиды равен 30° .

15.30

ФИПИ 5D991D

В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 6\sqrt{2}$.

- а) Докажите, что эта пирамида правильная.
- б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 1 : 2$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .

15.31

ФИПИ 33A81C

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ через ребро AB провели плоскость α , образующую сечение $ABMN$, где точки M и N — точки пересечения плоскости α с боковыми рёбрами SC и SD соответственно. Известно, что $AB = BM = AN = 5MN$.

- а) Докажите, что точки M и N делят рёбра SC и SD в отношении $1 : 4$, считая от вершины S .
- б) Найдите косинус угла между плоскостью основания $ABCD$ и плоскостью α .

15.32

ФИПИ 72412D

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K — середина ребра DD_1 .

- а) Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD .
- б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

15.33

ФИПИ 55B421

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ отметили точки M и K на рёбрах AA_1 и $A_1 B_1$ соответственно. Известно, что $A_1 M = 2MA$, $A_1 K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани $ABB_1 A_1$.

- а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1 .
- б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ плоскостью α , если все рёбра призмы равны 12 .

15.34

ФИПИ EFF32E

Плоскость α перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и пересекает ребро SA в точке K . Сечение пирамиды плоскостью α является правильным треугольником площадью $4\sqrt{3}$. а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой AC .

- б) В каком отношении точка K делит ребро SA , считая от точки S , если объём пирамиды равен $18\sqrt{3}$?

15.35

ФИПИ 0E8DDE

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K .

- а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна рёбрам AB и CD .
б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если известно, что $BK = 1$, $KC = 3$.

15.36

ФИПИ 142CDC

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

15.37

ФИПИ C185DD

Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 4$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- а) Докажите, что P — середина отрезка BQ .
б) Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 4$.

15.38

ФИПИ C300DC

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1 E : EA = 5 : 3$ и $B_1 F : FB = 5 : 11$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

15.39

ФИПИ 616CD3

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равны 4. Точка O — центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой SA и проходящая через точку O , пересекает рёбра SC и SD в точках M и N соответственно. Точка N делит ребро SD в отношении $SN : ND = 1 : 3$.

- а) Докажите, что точка M — середина ребра SC .
б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMN пересекает грань SBC .

15.40

ФИПИ 876DD3

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

15.41

ФИПИ 429Е53

В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 5\sqrt{2}$.

- а) Докажите, что эта пирамида правильная.
- б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 2 : 3$. Найдите площадь сечения MNB .

15.42

ФИПИ F416AF

В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 4. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = BN = 3$.

- а) Точки O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1 B_1 C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника CMN .
- б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CMN .

15.43

ФИПИ 0B28A5

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB = 5$, $BC = 3$, $AA_1 = 4$.

- а) Докажите, что плоскость α содержит точку D_1 .
- б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро $A_1 B_1$.

15.44

ФИПИ E8E9A7

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 2\sqrt{2}$, $AD = 6$, $AA_1 = 10$. На рёбрах AA_1 и BB_1 отмечены точки E и F соответственно, причём $A_1 E : EA = 3 : 2$ и $B_1 F : FB = 3 : 7$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через точку D_1 .
- б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

15.45

ФИПИ E8FAA5

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 1$, $CC_1 = 2\sqrt{2}$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

15.46

ФИПИ 82F7A1

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q — середина ребра A_1C_1 .

Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру AB .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , считая от точки P , если известно, что $AB = AA_1$, $AB : BC = 2 : 5$.

15.47

ФИПИ 5C14CA

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D .

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC , считая от вершины S , если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

15.48

ФИПИ CE2EC7

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны, на ребре AA_1 отмечена точка M . Известно, что $AM = 2MA_1$. Через точки M и C_1 провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1 .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро A_1B_1 пополам.

б) Найдите высоту призмы, если площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α равна $\sqrt{39}$.

15.49

ФИПИ 77C190

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания.

На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

15.50

ФИПИ 9B8297

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, K — точка пересечения прямых AB и CD .

а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

15.51

ФИПИ 8ЕВВ9F

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания.

На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 , если $AB = 21$, $BB_1 = 12$, $B_1C_1 = 16$.

15.52

ФИПИ 0549ЕВ

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$. Четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

а) Докажите, что точка N — середина ребра BC .

б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 12, а высота призмы равна 2.

15.53

ФИПИ 1D76E2

Точка M — середина ребра SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Точка N лежит на ребре SB , $SN : NB = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD .

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью CMN , если все рёбра пирамиды равны 6.

15.54

ФИПИ 1F7CE6

На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины рёбер DA и DC соответственно.

а) Докажите, что точки P , Q , M и N лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

15.55

ФИПИ A47BE8

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

15.56

ФИПИ 69A4ED

В правильном тетраэдре $ABCD$ все рёбра равны 6. На рёбрах AB и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM = AK = 4$.

а) Докажите, что плоскость CMK делит тетраэдр $ABCD$ на два многогранника, объёмы которых относятся как 5 : 4.

б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью CMK .

15.57

ФИПИ DE9364

Точка M — середина бокового ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Точка N лежит на стороне основания BC . Плоскость α проходит через точки M и N параллельно боковому ребру SA .

- а) Плоскость α пересекает боковое ребро SD в точке L . Докажите, что $BN : NC = DL : LS$.
- б) Плоскость α делит пирамиду $SABCD$ на два многогранника. Найдите отношение их объёмов, если $BN : NC = 1 : 3$.

15.58

ФИПИ C87061

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 1 : 2$, а точка K — середина ребра DD_1 .

- а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC , если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

15.59

ФИПИ 6F3F6D

На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM : MD = 2 : 1$.

Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно.

- а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
- б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

15.60

ФИПИ 17B23F

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.
- б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

15.61

ФИПИ A2B731

На рёбрах AC , AD , BD и BC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K , L , M и N соответственно, причём $AK : KC = 2 : 3$. Четырёхугольник $KLMN$ — квадрат со стороной 2.

- а) Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости KLM , если объём тетраэдра $ABCD$ равен 25.

15.62

ФИПИ FA228B

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q — середина ребра A_1C_1 .

Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро A_1C_1 , считая от точки A_1 , если известно, что $AB = AA_1$, $AB : BC = 2 : 5$.

15.63

ФИПИ ВСЕВ84

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и K — середины рёбер AB и SC соответственно, а точки N и L отмечены на рёбрах SA и BC соответственно так, что отрезки MK и NL пересекаются, а $AN = 3NS$.

а) Докажите, что прямые MN , KL и SB пересекаются в одной точке.

б) Найдите отношение $BL : LC$.

15.64

ФИПИ 135C80

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точки M и K — середины рёбер AB и SD соответственно.

а) Докажите, что прямая MK параллельна плоскости SBC .

б) Найдите высоту пирамиды, если $AB = 12$, а угол между прямой MK и плоскостью основания пирамиды равен 60° .

15.65

ФИПИ 637C89

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и K — середины рёбер AB и SC соответственно. На продолжении ребра SB за точку S отмечена точка R . Прямые RM и RK пересекают рёбра AS и BC в точках N и L соответственно, причём $BL = 3LC$.

а) Докажите, что отрезки MK и NL пересекаются.

б) Найдите отношение $AN : NS$.

15.66

ФИПИ 325286

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точки M и K — середины рёбер AB и SD соответственно.

а) Докажите, что прямая MK параллельна плоскости SBC .

б) Найдите высоту пирамиды, если $AB = 24$, а угол между прямой MK и плоскостью основания пирамиды равен 30° .