



18

Планиметрическая задача

18.1

ФИПИ АА7FF7

Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
- б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 30^\circ$, $B_1C_1 = 5$ и площадь треугольника AB_1C_1 в пять раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

18.2

ФИПИ В45F0C

Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M , а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N . Отрезки AM и CN пересекаются в точке P .

- а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.
- б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 23$.

18.3

ФИПИ 5CVC00

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD .

- а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .
- б) Найдите CD , если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6,5$.

18.4

ФИПИ 2EBDBF

Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
- б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

18.5

ФИПИ D57CB9

Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M , а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N . Отрезки AM и CN пересекаются в точке P .

- а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.
- б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 17$.

18.6

ФИПИ 56С211

Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 3 : 4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW , равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ — острый.

- а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.
б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

18.7

ФИПИ 3СDB1В

Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 135^\circ$, $B_1C_1 = 10$ и площадь треугольника AB_1C_1 в семь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

18.8

ФИПИ 5Е7ВDE

Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

- а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.
б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = \sqrt{21}$.

18.9

ФИПИ А96557

Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 1 : 4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW , равен 10, $PQ = 16$, $QW = 12$, угол PWQ — острый.

- а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.
б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

18.10

ФИПИ 829956

Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

18.11

ФИПИ 8F66A4

Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

- а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .
б) Вычислите длину стороны B_1C_1 и радиус данной окружности, если $\angle A = 150^\circ$, $BC = 5\sqrt{5}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в четыре раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

18.12

ФИПИ 2B52E7

Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 .

б) Вычислите длину стороны B_1C_1 и радиус данной окружности, если $\angle A = 120^\circ$, $BC = 10\sqrt{7}$ и площадь треугольника AB_1C_1 в три раза меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1 .

18.13

ФИПИ FААЕ63

Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC , пересекает сторону AD в точке M , равноудалённой от вершин B и D .

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM , если $BC = 9$.

18.14

ФИПИ 00E23C

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD .

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .

б) Найдите CD , если известны диагонали трапеции: $AC = 15$ и $BD = 8,5$.

18.15

ФИПИ 4F4F44

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $AB_1 : B_1C = 1 : 3$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

а) Докажите, что четырёхугольник ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 16$, $BC = 15$.

18.16

ФИПИ FCDC46

В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CT к боковым сторонам BC и AB . Отрезки HM и NK — перпендикуляры к прямым AB и AC соответственно. Отрезки CT и MK пересекаются в точке E .

а) Докажите, что $TH = ME$.

б) Найдите длину отрезка EK , если $AB = 13$ и $AC = 10$.

18.17

ФИПИ 2AE241

В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 2\sqrt{3}$.

18.18

ФИПИ C5B743

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 8$. Известно, что $AB = BC = CD = 12$.

- а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
б) Найдите AD .

18.19

ФИПИ 6D7942

В остроугольном треугольнике ABC отрезки AH , BN и CK — высоты. Известно, что $AK = 1$, $BH = 2$, а $\angle KHN = 60^\circ$.

- а) Докажите, что $\angle ABC = 60^\circ$.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

18.20

ФИПИ 80E34E

В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CT к боковым сторонам BC и AB . Отрезки HM и HK — перпендикуляры к прямым AB и AC соответственно. Отрезки CT и MK пересекаются в точке E .

- а) Докажите, что прямые AB и EH параллельны.
б) Найдите длину отрезка ME , если $AB = 13$ и $AC = 10$.

18.21

ФИПИ 4E19FD

В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC . Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.

- а) Докажите, что $AM = DM$.
б) Найдите угол BAD , если угол ADC равен 70° , а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC .

18.22

ФИПИ 4963FE

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O . Эта окружность касается стороны MN в точке A . Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle NKL = \angle KLM = 120^\circ$.

- а) Докажите, что точка A лежит на прямой LO .
б) Найдите длину стороны MN , если $LA = 1$.

18.23

ФИПИ 41A5F8

В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

- а) Докажите, что $AH = AO$.
б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

18.24

ФИПИ 0BC5F1

Окружность проходит через вершины A , B и C параллелограмма $ABCD$, пересекает продолжение стороны AD за точку D в точке E и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K .

- а) Докажите, что $BK = BE$.
б) Найдите отношение $KE : AC$, если $\angle BAD = 30^\circ$.

18.25

ФИПИ B58CFA

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . На боковых сторонах AB и CD отмечены точки M и N соответственно так, что $AM = MO$, $CN = NO$.

- а) Докажите, что точки M , O и N лежат на одной прямой.
б) Найдите отношение $AM : MB$, если $AO = CO$ и $BC : AD = 17 : 31$.

18.26

ФИПИ 2412FA

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM = MC$.

- а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC .
б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5$, $BC = 10$, $\angle BAD = 60^\circ$.

18.27

ФИПИ 6B82FF

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC — диаметр этой окружности.

- а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла ANB .
б) Найдите длину отрезка NO , если известно, что $AC = 10$ и $AB = 24$.

18.28

ФИПИ 060A0A

В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание AD в три раза больше основания BC .

- а) Докажите, что высота CH трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых вдвое больше другого.
б) Найдите расстояние от вершины C до середины диагонали BD , если $AD = 15$ и $AC = 2\sqrt{61}$.

18.29

ФИПИ B3890A

В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M .

- а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.

18.30

ФИПИ Е6АС01

В треугольнике ABC угол ACB равен 30° , отрезки AH и AM — высота и медиана соответственно, причём точка H лежит на отрезке BM .

Отрезок MQ — высота треугольника AMC , а прямые AH и MQ пересекаются в точке F . Известно, что луч AM — биссектриса угла CAH .

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите площадь треугольника CMF , если $AB = 8$.

18.31

ФИПИ D9D771

Окружность с центром в точке O высекает на всех сторонах трапеции $ABCD$ равные хорды.

- Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.
- Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 15$, $KL = 6$, $LB = 5$.

18.32

ФИПИ 54Е571

В треугольнике ABC продолжения высоты CC_1 и биссектрисы BB_1 пересекают описанную окружность в точках N и M соответственно, $\angle ABC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

- Докажите, что $BM = CN$.
- Прямые BC и MN пересекаются в точке D . Найдите площадь треугольника BDN , если его высота BH равна 6.

18.33

ФИПИ B5D2B2

На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M . Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно.

- Докажите, что треугольники AEM и CMK подобны.
- Найдите отношение $AM : MC$, если площади треугольников AEM и CMK равны 4 и 9 соответственно.

18.34

ФИПИ 548СВА

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром O . Эта окружность касается стороны MN в точке A . Известно, что $\angle MNK = 90^\circ$, $\angle LMN = \angle KLM = 60^\circ$.

- Докажите, что точка A лежит на прямой LO .
- Найдите длину стороны MN , если $LA = 3$.

18.35

ФИПИ АС39В7

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M . Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

- Докажите, что $BC = DE$.
- Найдите длину стороны AB , если известно, что $DE = 4$, $AD = 7$, $BE = 8$ и $AB > BC$.

18.36

ФИПИ 34Е1В6

Сумма оснований трапеции равна 13, а её диагонали равны 5 и 12.

- а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
б) Найдите высоту трапеции.

18.37

ФИПИ 10D010

Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- а) Докажите, что $\angle BB_1C_1 = \angle BAH$.
б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до стороны BC , если $B_1C_1 = 18$ и $\angle BAC = 30^\circ$.

18.38

ФИПИ 813416

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K .

- а) Докажите, что $AE = AK$.
б) Найдите отношение $KE : BD$, если $\angle BAD = 60^\circ$.

18.39

ФИПИ 7С842В

В треугольнике ABC точки M и N лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $AM : MB = CN : NB = 2 : 3$. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается отрезка MN в точке L .

- а) Докажите, что $AB + BC = 4AC$.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC , если $ML = \frac{9}{5}$, $LN = 3$.

18.40

ФИПИ 73ВЕ23

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и E и пересекает сторону CD в точках K и D .

- а) Докажите, что $AE = AK$.
б) Найдите AD , если $CE = 10$, $DK = 9$ и $\cos \angle BAD = 0,2$.

18.41

ФИПИ ЕА7D2В

В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

- а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H , если $BC = 6\sqrt{3}$.

18.42

ФИПИ FC6FD7

В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD .

Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L . На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E , что $AE = CE$.

- а) Докажите, что $AL \cdot BC = AB \cdot AC$.
б) Найдите EL , если $AC = 8$, $\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{1}{2}$.

18.43

ФИПИ 0112D3

В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CT к боковым сторонам BC и AB . Отрезки HM и HK — перпендикуляры к прямым AB и AC соответственно. Отрезки CT и MK пересекаются в точке E .

- а) Докажите, что прямые AB и EH параллельны.
- б) Найдите длину отрезка ME , если $AB = 17$ и $AC = 16$.

18.44

ФИПИ 0E9DD3

В остроугольном треугольнике ABC угол BAC в два раза больше угла ABC . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника AOC , пересекает отрезок BC в точках C и P .

- а) Докажите, что $AP = BP$.
- б) Найдите длину стороны BC , если $AB = 7$, $AC = 4$.

18.45

ФИПИ 16DDDD

В остроугольном треугольнике ABC угол BAC в два раза больше угла ABC . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника AOC , пересекает отрезок BC в точках C и P .

- а) Докажите, что треугольники PAC и ABC подобны.
- б) Найдите длину стороны AB , если $AC = 2$, $BC = \sqrt{10}$.

18.46

ФИПИ EF3DDA

В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём $CM = BC$ и $CN = AC$.

- а) Отрезки CP и CQ — медианы треугольников ABC и NCM соответственно. Докажите, что прямые CP и CQ перпендикулярны.
- б) Прямые MN и AB пересекаются в точке K , а прямые BM и AN — в точке L . Найдите KL , если $BC = 1$, а $AC = 5$.

18.47

ФИПИ D8C152

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

- а) Докажите, что $AC = CE$.
- б) Найдите длину диагонали BE , если $AD = 6$.

18.48

ФИПИ D6A053

Окружность с центром O касается боковых сторон AB и BC равнобедренного остроугольного треугольника ABC и его высоты CH .

- а) Докажите, что $\angle AOC = 90^\circ$.
- б) Найдите площадь треугольника ABC , если $BO = 7$ и $AC = 16$.

18.49

ФИПИ 5259A1

Сумма оснований трапеции равна 10, а её диагонали равны 6 и 8.

- а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
- б) Найдите высоту трапеции.

18.50

ФИПИ А7А4АВ

Две окружности касаются внутренним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E , а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D .

- а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.
б) Найдите AC , если радиусы окружностей равны 3 и 4.

18.51

ФИПИ 9595А4

В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

- а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H , если $BC = 4\sqrt{3}$.

18.52

ФИПИ 8377А1

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B . Отрезок BC — диаметр этой окружности.

- а) Докажите, что $\angle ANB = 2\angle ABC$.
б) Найдите расстояние от точки N до прямой AB , если известно, что $AC = 14$ и $AB = 36$.

18.53

ФИПИ 78А6С2

Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M , а диагональ BD в точке N , причём $AM : MC = 1 : 2$, $BN : ND = 1 : 3$.

- а) Докажите, что $\cos \angle BAD = \frac{1}{5}$.
б) Найдите площадь ромба, если $MN = 5$.

18.54

ФИПИ А003СВ

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно, точка K отмечена на катете BC так, что $CK : KB = 1 : 3$.

- а) Докажите, что $AN = 2KM$.
б) Пусть P — точка пересечения отрезков AN и KM . Найдите длину отрезка прямой BP , заключённого внутри треугольника ABC , если $AC = 6$, $BC = 8$.

18.55

ФИПИ 9С96С5

Окружность с центром O касается катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC в точках M и E соответственно, а его гипотенузы — в точке K . Отрезок EH — перпендикуляр к прямой MK .

- а) Докажите, что прямые CH и EK параллельны.
б) Найдите отношение $CH : EK$, если $AC = 12$ и $BC = 5$.

18.56

ФИПИ BAD790

В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle BCA = 15^\circ$.

а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H , если $BC = 4\sqrt{3}$.

18.57

ФИПИ 92699С

Периметр треугольника ABC равен 36. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC .

а) Докажите, что $AC = 9$.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $\angle ACB = 90^\circ$.

18.58

ФИПИ 86В99А

В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезки CM и DN пересекаются в точке K .

а) Докажите, что $\angle BKM = 45^\circ$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABK , если сторона $AB = 2\sqrt{10}$.

18.59

ФИПИ F2A2EB

На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M . Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что $\angle AEM = \angle CMK$.

б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK , если $AM : MC = 1 : 4$.

18.60

ФИПИ 0ЕЗСЕ7

Окружность с центром O касается боковых сторон AB и BC равнобедренного остроугольного треугольника ABC и его высоты CH .

а) Докажите, что $\angle OAC = 45^\circ$.

б) Найдите длину отрезка BC , если $BO = 1$ и $AC = 6$.

18.61

ФИПИ 0063ED

В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H . Через точку C_1 параллельно высоте BB_1 проведена прямая, пересекающая высоту AA_1 в точке K .

а) Докажите, что $AB \cdot KH = BC \cdot C_1H$.

б) Найдите отношение площадей треугольников C_1HK и ABC , если $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 5$.

18.62

ФИПИ ВЕ8FE4

Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P . Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

- а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.
- б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP . Найдите длину отрезка AL , если радиус большей окружности равен 34, а $BC = 32$.

18.63

ФИПИ 003F6E

На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AB = BD$. Биссектриса BF треугольника ABC пересекает прямую AD в точке E . Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр CK .

- а) Докажите, что $AB : BC = AE : EK$.
- б) Найдите отношение площади треугольника ABE к площади четырёхугольника $CDEF$, если $BD : DC = 5 : 2$.

18.64

ФИПИ Е80769

Прямая, перпендикулярная стороне BC ромба $ABCD$, пересекает его диагональ AC в точке M , а диагональ BD в точке N , причём $AM : MC = 1 : 2$, $BN : ND = 1 : 3$.

- а) Докажите, что прямая MN делит сторону ромба BC в отношении $1 : 4$.
- б) Найдите сторону ромба, если $MN = \sqrt{6}$.

18.65

ФИПИ 36CE6E

В параллелограмме $ABCD$ с острым углом BAD из вершины B проведены высоты BP и BQ , причём точка P лежит на стороне AD , а точка Q — на стороне CD . На стороне AD отмечена точка M . Известно, что $AM = BP$, $AB = BQ$.

- а) Докажите, что $BM = PQ$.
- б) Найдите площадь треугольника APQ , если $AM = BP = 8$, $AB = BQ = 10$.

18.66

ФИПИ 8Е946Е

В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CT к боковым сторонам BC и AB . Отрезки HM и HK — перпендикуляры к прямым AB и AC соответственно. Отрезки CT и MK пересекаются в точке E .

- а) Докажите, что $TH = ME$.
- б) Найдите длину отрезка EK , если $AB = 5$ и $AC = 6$.

18.67

ФИПИ 7Е3432

Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C . Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E , а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D .

- а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.
- б) Найдите BC , если радиусы окружностей равны $\sqrt{15}$ и 15.

18.68

ФИПИ 7ЕЕВ3Е

Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Окружность с центром O_2 касается сторон BC , CD и AD . Известно, что $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 30$, $AD = 39$.

- а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции $ABCD$.
б) Найдите O_1O_2 .

18.69

ФИПИ 15ЕЕ35

Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O .

- а) Докажите, что $CO = KO$.
б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD , если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{100}$ площади трапеции $ABCD$.

18.70

ФИПИ 909839

Окружность проходит через вершины A , B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N .

- а) Докажите, что $AM = AN$.
б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 2$, а $\cos \angle BAD = \frac{2}{3}$.

18.71

ФИПИ 832С34

В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC .

- а) Докажите, что высота CH трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых втрое больше другого.
б) Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка OD , если $BC = 16$ и $AB = 10$.

18.72

ФИПИ АС2684

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 21 : 10$, $BA_1 : A_1C = 2 : 3$, $AB_1 : B_1C = 2 : 5$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

- а) Докажите, что четырёхугольник ADA_1B_1 — параллелограмм.
б) Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 63$, $BC = 25$.

18.73

ФИПИ Е87882

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD .

- а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.
б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

18.74

ФИПИ 3B468E

В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 3$, $\angle ABC = 15^\circ$.

18.75

ФИПИ 8C8D87

Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается её боковой стороны CD в точке M . Луч AM вторично пересекает окружность в точке N , а прямую BC — в точке K , причём $AN = 4$, $MN = 12$.

а) Докажите, что $\angle AMD = \angle MCK$.

б) Найдите основания трапеции.