



20

Числа и их свойства

20.1

ФИПИ 30D64C

С трёхзначным числом производят следующую операцию: к нему прибавляют цифру десятков, умноженную на 10, а затем к получившейся сумме прибавляют 3.

- а) Могло ли в результате такой операции получиться число 224?
- б) Могло ли в результате такой операции получиться число 314?
- в) Найдите наибольшее отношение получившегося числа к исходному.

20.2

ФИПИ F58FFD

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 2 раза?
- б) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?
- в) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

20.3

ФИПИ 7B10F3

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

- а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?
- б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?
- в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть на доске?

20.4

ФИПИ 7CA5F3

Есть три коробки: в первой коробке 97 камней, во второй — 104, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

- а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй — 89, а в третьей — 15?
- б) Мог ли в третьей коробке оказаться 201 камень?
- в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

20.5

ФИПИ А68ДФВ

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел из записанных является целым числом.

- а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 403 и 2013?
- б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если среди записанных на доске чисел есть число 403?
- в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число 1 и квадрат натурального числа n , большего 1. Найдите наименьшее возможное значение n .

20.6

ФИПИ АВЗСФВ

По кругу расставлено N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 365. Сумма любых четырёх идущих подряд чисел делится на 4, а сумма любых трёх идущих подряд чисел нечётна.

- а) Может ли N быть равным 200?
- б) Может ли N быть равным 109?
- в) Найдите наибольшее значение N .

20.7

ФИПИ 6Е44ФВ

На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 3, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше —72.

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

- а) Может ли на столе лежать ровно четыре карточки?
- б) Может ли число красных карточек на столе быть на 60 больше числа синих карточек на столе?
- в) Какое наибольшее количество карточек может лежать на столе?

20.8

ФИПИ 8381FC

Есть четыре коробки: в первой коробке 101 камень, во второй — 102, в третьей — 103, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

- а) Могло ли в первой коробке оказаться 97 камней, во второй — 102, в третьей — 103, а в четвёртой — 4?
- б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 306 камней?
- в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

20.9

ФИПИ 2В4308

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 25 % от общего количества контейнеров.

- а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 20 % от общей массы всех контейнеров?
- б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 60 % от общей массы всех контейнеров?
- в) Какую наименьшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

20.10

ФИПИ АВОF0C

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 60 и меньше 140.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел?
- б) Может ли на доске быть 6 чисел?
- в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

20.11

ФИПИ F37F75

На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 3, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше —**36**.

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

- а) Может ли на столе лежать ровно одна синяя карточка?
- б) Может ли на столе лежать ровно 50 синих карточек?
- в) Какое наибольшее количество синих карточек может лежать на столе?

20.12

ФИПИ D3C577

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

- а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?
- б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?
- в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

20.13

ФИПИ 920С72

Каждое из четырёх последовательных натуральных чисел, последние цифры которых не равны нулю, поделили на его последнюю цифру. Сумма получившихся чисел равна S .

а) Может ли S быть равной $16\frac{5}{6}$?

б) Может ли S быть равной $569\frac{29}{126}$?

в) Найдите наибольшее целое значение S , если каждое из исходных чисел было трёхзначным.

20.14

ФИПИ В3С1В7

На столе лежит N монет по 2 рубля и $(1200 - N)$ монет по 5 рублей (N — натуральное число от 1 до 1199). Оказалось, что если взять любые 500 монет, то сумма денег, набранная этими монетами, будет не меньше четверти от общей суммы денег на столе.

а) Может ли N равняться 400?

б) Может ли N равняться 600?

в) Сколько различных значений может принимать число N ?

20.15

ФИПИ АЕД2ВВ

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?

в) Пусть B — шестое по величине число, а S — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$.

20.16

ФИПИ А8ЕВВ6

На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

а) Может ли на доске быть ровно 24 чётных числа?

б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 7?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

20.17

ФИПИ В5Д110

На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число.

К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 1, к каждому числу из второй группы — цифру 8, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 4 раза?

б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 18 раз?

в) Сумма всех этих чисел увеличилась в 11 раз. Какое наибольшее количество чисел могло быть написано на доске?

20.18

ФИПИ 9С9614

На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5120.

- а) Может ли оказаться, что на доске написано число 230?
 - б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 14?
 - в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?
-

20.19

ФИПИ Е5791Е

Тройку различных натуральных чисел назовём *удачной*, если любое число в ней хотя бы на 5 больше, чем треть суммы двух других чисел. Например, 40, 45, 50 — удачная тройка.

- а) Сколько существует удачных троек, содержащих числа 50, 60 и ещё одно число, большее 60?
 - б) Найдётся ли удачная тройка, одно из чисел которой равно 15?
 - в) Какое наибольшее количество чисел от 1 до 100 включительно можно расставить по кругу так, чтобы каждое число встречалось не более одного раза и любые три подряд идущих числа образовывали удачную тройку?
-

20.20

ФИПИ 34А218

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1+1+111+11+11+1=136$.

- а) Можно ли получить сумму 132, если $n = 60$?
 - б) Можно ли получить сумму 132, если $n = 80$?
 - в) Для скольких значений n можно получить сумму 132?
-

20.21

ФИПИ 742D28

На доске записано некоторое количество последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять делятся на 20.

- а) Могло ли среди записанных чисел быть больше пяти чисел, делящихся на 21?
 - б) Могло ли среди записанных чисел быть меньше пяти чисел, делящихся на 15?
 - в) Найдите наибольшее возможное число k такое, что среди записанных чисел больше пяти чисел делятся на k .
-

20.22

ФИПИ D8F724

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

- а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?
- б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?
- в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

20.23

ФИПИ D6152F

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №2 средний балл равнялся 42.

Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%.

- а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?
- б) Каждый учащийся школы №2, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в неё учащийся школы №1. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся школы №2?
- в) Какое наибольшее количество учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?

20.24

ФИПИ A65127

В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 5 писем, или 16 писем, причём и тех и других юношей было не меньше двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

- а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?
- б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?
- в) Пусть все девушки получили попарно различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

20.25

ФИПИ EC9829

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел?
- б) Может ли на доске быть 6 чисел?
- в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

20.26

ФИПИ 85FA27

В ящике лежит 87 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 94 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 127 г.

- а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?
- б) Могло ли в ящике оказаться меньше 9 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?
- в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

20.27

ФИПИ 4B81D5

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1+1+111+11+11+1=136$.

- а) Можно ли получить сумму 113, если $n = 50$?
- б) Можно ли получить сумму 114, если $n = 50$?
- в) Какую наибольшую четырёхзначную сумму можно получить, если $n = 50$?

20.28

ФИПИ 40BED3

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №1 средний балл равнялся 18.

Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%.

- а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?
- б) В школе №1 все писавшие тест набрали разное количество баллов. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся этой школы?
- в) Известно, что изначально в школе №2 писали тест более 10 учащихся. Какое наименьшее количество учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?

20.29

ФИПИ 7C3FDA

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

- а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 3?
- б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 11?
- в) Найдите наибольшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

20.30

ФИПИ E983D6

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе №1 уменьшиться в 10 раз?
- б) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 7?
- в) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

20.31

ФИПИ 6948DB

Из пары натуральных чисел $(a; b)$ за один ход можно получить пару $(a + 2; b - 1)$ или $(a - 1; b + 2)$ при условии, что оба числа в новой паре положительны. Сначала есть пара $(5; 7)$.

- а) Можно ли за 50 таких ходов получить пару, в которой одно из чисел равно 100?
- б) За какое число ходов получится пара, сумма чисел в которой равна 400?
- в) Какое наибольшее число ходов можно сделать так, чтобы после каждого хода оба числа в паре не превосходили 100?

20.32

ФИПИ 4A9559

Для чисел A и B , состоящих из одинакового количества цифр, вычисляют S — сумму произведений соответствующих цифр. Например, для чисел $A = 123$ и $B = 579$ получается сумма $S = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 46$.

- а) Существуют ли трёхзначные числа A и B , для которых $S = 200$?
- б) Существуют ли четырёхзначные числа A и B , для которых $S = 320$?
- в) Верно ли, что любое натуральное число от 1 до 340 является суммой S для некоторых пятизначных чисел A и B ?

20.33

ФИПИ 6FF25E

На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 3, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше -60 .

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

- а) Может ли на столе лежать ровно три красных карточки?
- б) Может ли на столе лежать ровно 150 красных карточек?
- в) Какое наибольшее количество красных карточек может лежать на столе?

20.34

ФИПИ 394D51

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх или пяти чисел из записанных является целым числом.

- а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 305 и 1511?
- б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом другого, если среди записанных на доске чисел есть число 305?
- в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число n и его квадрат n^2 . Найдите наименьшее возможное значение n .

20.35

ФИПИ D51CAD

По кругу расставлено N различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 400. Сумма любых четырёх идущих подряд чисел делится на 3, а сумма любых трёх идущих подряд чисел не делится на 3.

- а) Может ли N быть равным 360?
- б) Может ли N быть равным 149?
- в) Найдите наибольшее значение N .

20.36

ФИПИ A87FAB

На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 5, а на карточках красного цвета написаны различные числа, делящиеся на 3 (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше —45.

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно утроенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

- а) Может ли на столе лежать ровно пять красных карточек?
- б) Может ли на столе лежать ровно 100 красных карточек?
- в) Какое наибольшее количество красных карточек может лежать на столе?

20.37

ФИПИ 6E32AD

На доске написано несколько различных натуральных чисел, в записи которых могут быть только цифры 4 и 9 (возможно, только одна из этих цифр).

- а) Может ли сумма этих чисел быть равна 107?
- б) Может ли сумма этих чисел быть равна 289?
- в) Какое наименьшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 3986?

20.38

ФИПИ 002FC3

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

- а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \dots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
- б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
- в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

20.39

ФИПИ C009C4

Есть 16 монет по 2 рубля и 29 монет по 5 рублей.

- а) Можно ли этими монетами набрать сумму 175 рублей?
- б) Можно ли этими монетами набрать сумму 176 рублей?
- в) Какое наименьшее количество монет, каждая по 1 рублю, нужно добавить, чтобы иметь возможность набрать любую целую сумму от 1 рубля до 180 рублей включительно?

20.40

ФИПИ 9FE39A

На доске написано некоторое количество двузначных натуральных чисел, среди которых могут быть одинаковые. С каждым из этих чисел проделывают одну из двух операций: либо увеличивают цифру в разряде десятков на 2 и уменьшают цифру в разряде единиц на 5, либо уменьшают цифру в разряде десятков на 2 и увеличивают цифру в разряде единиц на 2. Все числа, получившиеся в результате, оказались двузначными натуральными.

- а) Может ли сумма исходных чисел оказаться на 128 меньше суммы получившихся чисел?
- б) Может ли количество чисел на доске равняться 25, если сумма исходных чисел равна сумме получившихся чисел?
- в) Какое наибольшее количество чисел может быть написано на доске, если сумма исходных чисел равна сумме получившихся чисел и меньше 1198?

20.41

ФИПИ 37B190

Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа — n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1001 фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

- а) Могли ли они фотографировать в течение 7 дней?
- б) Могли ли они фотографировать в течение 8 дней?
- в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 40 фотографий?

20.42

ФИПИ 2907EB

На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20, меньше, чем чисел, делящихся на 23.

- а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?
- б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20?
- в) Найдите наибольшее возможное значение k .

20.43

ФИПИ 5066Е8

По окружности в некотором порядке расставлены натуральные числа от 1 до 12. Между каждыми двумя соседними числами написали модуль их разности. Затем исходные числа стёрли.

- а) Приведите пример расстановки, когда сумма полученных чисел равна 32.
- б) Может ли сумма полученных чисел быть равна 29?
- в) Какое наибольшее значение может принимать сумма полученных чисел?

20.44

ФИПИ А0А7ЕВ

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

- а) Может ли n быть больше 6?
- б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
- в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

20.45

ФИПИ СFEFEF

Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое — трёхзначное и оба кратны 45.

- а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 2205?
- б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3435?
- в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

20.46

ФИПИ С690ЕВ

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

- а) Может ли n быть больше 5?
- б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
- в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

20.47

ФИПИ С794ЕА

а) Можно ли представить число 2043 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли представить число 599 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы семи различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

20.48

ФИПИ EA76EF

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 25 и меньше 85.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел?
- б) Может ли на доске быть 6 чисел?
- в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

20.49

ФИПИ 8755EE

Деревянную линейку, длина которой выражается целым числом сантиметров, разрезают на куски. За один ход можно взять один или несколько кусков линейки, положить их друг на друга и разрезать каждый из них на две части, длины которых выражаются целым числом сантиметров.

- а) Можно ли за четыре хода разрезать линейку длиной 16 см на куски длиной 1 см?
- б) Можно ли за пять ходов разрезать линейку длиной 100 см на куски длиной 1 см?
- в) Какое наименьшее число ходов нужно сделать, чтобы разрезать линейку длиной 200 см на куски длиной 1 см?

20.50

ФИПИ 0FB969

Есть 4 камня, каждый массой 7 тонн, и 9 камней, каждый массой 22 тонны.

- а) Можно ли разложить все эти камни на две группы так, чтобы разность суммарных масс камней в этих группах составила 8 тонн?
- б) Можно ли разложить все эти камни на две группы, суммарные массы камней в которых равны?
- в) Все камни хотят разложить на две группы. Какое наименьшее положительное значение (в тоннах) может принимать разность суммарных масс камней в этих группах?

20.51

ФИПИ 7F366B

Из правильной несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа, за один ход получают дробь $\frac{a+b}{2a+b}$.

- а) Можно ли за несколько таких ходов из дроби $\frac{1}{3}$ получить дробь $\frac{22}{31}$?
- б) Можно ли за два таких хода из некоторой дроби получить дробь $\frac{7}{12}$?
- в) Несократимая дробь $\frac{c}{d}$ больше 0,7. Найдите наименьшую дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить ни из какой правильной несократимой дроби за два таких хода?

20.52

ФИПИ 2A4168

На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 45 и меньше 120.

- а) Может ли на доске быть 5 чисел?
- б) Может ли на доске быть 6 чисел?
- в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

20.53

ФИПИ Е8АА65

На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 5, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше — **120**.

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

- а) Может ли на столе лежать ровно шесть карточек?
- б) Может ли число красных карточек на столе быть на 90 больше числа синих карточек на столе?
- в) Какое наибольшее количество карточек может лежать на столе?

20.54

ФИПИ 724631

Ваня написал на доске трёхзначное число **A**. Петя переписал это число **A**, вычеркнул из него одну цифру и получил двузначное число **B**. Коля тоже переписал это число **A**, вычеркнул из него одну цифру (возможно, ту же самую, что и Петя) и получил двузначное число **C**.

- а) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$, если $A > 150$?
- б) Может ли быть верным равенство $A = B \cdot C$, если $540 \leq A < 600$?
- в) Найдите наибольшее число **A**, для которого может быть верным равенство $A = B \cdot C$.

20.55

ФИПИ 12АЕ34

Из пары натуральных чисел $(a; b)$, где $a > b$, за один ход получают пару $(a+b; a-b)$.

- а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару, большее число в которой равно 400?
- б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100; 1)$ пару $(806; 788)$?
- в) Какое наименьшее **a** может быть в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806; 788)$?

20.56

ФИПИ F89087

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти или шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 033.

- а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 303?
- б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 31?
- в) Отношение двух записанных на доске чисел является квадратом натурального числа **n**. Найдите наименьшее возможное значение **n**.

20.57

ФИПИ FB6A82

На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число.

К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы — цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений.

- а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?
- б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?
- в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

20.58

ФИПИ 2DC181

Над парами целых чисел проводится операция: из пары $(a; b)$ получается пара $(3a + b; 3b - a)$.

- а) Можно ли из какой-то пары получить пару $(5; 5)$?
- б) Верно ли, что если пара $(c; d)$ может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции, то и пара $(-d; c)$ тоже может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции?
- в) Зададим расстояние между парами целых чисел $(a; b)$ и $(c; d)$ выражением $|a - c| + |b - d|$. Найдите наименьшее расстояние от пары $(9; 2)$ до пары, полученной из какой-то пары с помощью данной операции.

20.59

ФИПИ D5588E

На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 6, а среднее арифметическое шести наибольших равно 12.

- а) Может ли наибольшее из этих десяти чисел равняться 14?
- б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 8,4?
- в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех десяти чисел.

20.60

ФИПИ 9BC08F

С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

- а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?
- б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?
- в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

20.61

ФИПИ 354582

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти или шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

- а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?
- б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?
- в) Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом n . Найдите наименьшее возможное значение n .